

AR 2022/2023 1. polo semestrální test – vzorové příklady pro F7PBBLAD, F7PBKAD, 17PBBLAD, 17PBOMA1

Teorie

1. Co je posloupnost reálných čísel, co je maximum, minimum, supremum, infimum, monotonie posloupnosti, omezenost, limita.
2. Co je reálná funkce jedné reálné proměnné, její definiční obor, obor hodnot, graf. Vlastnosti funkce (sudost, lichost, periodicita), prostá funkce, inverzní funkce.
3. Maximum, minimum (lokální, globální), supremum, infimum, monotonie funkce, omezenost funkce.
4. Limita funkce definice, užití (včetně jednostranných limit).
5. Asymptota ke grafu funkce: asymptota bez směrnice, asymptota se směrnicí, použití limit při určování asymptot.
6. Spojitá funkce v bodě, na intervalu. Souvislost mezi limitou v bodě a spojitostí funkce v bodě.
7. Derivace funkce v bodě, derivace funkce na intervalu, pravidla pro derivování funkce (součet, rozdíl, součin, podíl, složená funkce).
8. Tečna a normála ke grafu funkce, souvislost mezi směrnicí tečny a monotonií funkce v okolí.
9. Vyšetřování průběhu funkce. Souvislost mezi 1. derivací a monotonií funkce a jak určujeme lokální extrémy. Souvislost 2. derivace funkce a konkávnosti/konvexnosti funkce, co je inflexní bod a jak ho určujeme.

I. Posloupnosti

- a) Určete maximum, minimum, supremum a infimum a limitu posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ pokud tyto existují.
- b) Zjistěte vlastnosti posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (omezenost shora/zdola, monotonie) a své tvrzení zdůvodněte.

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} =$$

$$i) \left\{ \frac{n^3 + 6n - 4}{2n^2 - 3n + 2} \right\}, \quad ii) \left\{ \frac{4n}{-3n^2 + 5n + 1} \right\}, \quad iii) \left\{ \frac{2n^2 + 4}{5n^2 - n} \right\}, \quad iv) \left\{ \left(\frac{n-2}{n+1} \right)^n \right\}$$

II. Funkce

II.1 Asymptoty funkce f

Pro danou funkci $f(x)$

- a) Určete definiční obor funkce $f(x)$ a všechny její asymptoty.
- b) Načrtněte asymptoty a graf funkce v blízkosti asymptot.

$$f(x) =$$

$$i) \frac{3x^2 + 5x - 2}{x + 2}, \quad ii) \frac{-3x + 5}{x - 1}, \quad iii) \arctg x - 2x, \quad iv) \frac{4x^2 - x + 2}{2x + 1}$$

II.2. Spojitost funkce

$$i) \text{ Dána funkce } f_p(x) = \begin{cases} 2px^2 - p^2x & x < 1 \\ \sqrt{x+3} - p & x > 1 \end{cases}.$$

- a) Zapište podmínku, kterou musí funkce f splňovat, aby ji bylo možné spojitě dodefinovat v bodě $x = 1$.
- b) Určete nenulovou hodnotu parametru p , pro kterou lze funkci f v bodě $x = 1$ spojitě dodefinovat.
- c) Pro stanovenou hodnotu parametru p zapište funkci f a vypočtěte funkční hodnotu v bodě $x = 1$.

$$ii) \text{ Dána funkce } f_p(x) = \begin{cases} px + \frac{2p}{x} & x \in (0, 2) \\ p + x^2 & x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

- a) Zapište podmínku, která musí platit, aby daná funkce byla v bodě $x = 2$ spojitá.
- b) Určete všechny hodnoty parametru p , pro které je funkce f spojitou funkcí v bodě $x = 2$.
- c) Zapište pro každou určenou hodnotu parametru p funkci f a určete funkční hodnotu v bodě $x = 2$.

II.3 V příkladech i) - v)

- a) Určete definiční obor dané funkce a rozhodněte, zda je funkce lichá, nebo sudá, nebo ani lichá, ani sudá.
 b) Spočítejte derivaci dané funkce a určete definiční obor derivace.

i) Spočítejte derivaci funkce $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{2}x^4 - x^2 + 1}}{4}$ v bodě $x = 0$ a rozhodněte, zda je funkce v pravém okolí tohoto bodu rostoucí, nebo klesající.

ii) $f(x) = \frac{2x}{12 - 3x^2}$. Kde je daná funkce rostoucí? Kde je daná funkce klesající?

Sestavte rovnici tečny v bodě $x = 1$.

iii) Dána funkce $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 3)$

Spočítejte derivaci zadané funkce v bodě $x = 4$ a rozhodněte, zda v jeho levém okolí je funkce f rostoucí, nebo klesající. Obdobně rozhodněte, zda v jeho pravém okolí je funkce f rostoucí, nebo klesající. Určete rovnici tečny v bodě $x = 4$.

iv) Dána funkce $f(x) = (\sin(3x) - \cos(2x))^2$. Spočítejte derivaci zadané funkce v bodě $x = 0$ a rozhodněte, zda v jeho okolí je funkce f rostoucí, nebo klesající.

v) Dána funkce $f(x) = \ln(x+6) \cdot \sqrt{-x^2 - 3x + 10}$.

Spočítejte derivaci zadané funkce v bodě $x = 0$ a popište její chování v pravém okolí bodu $x = 0$.

Nápověda: $\ln(6) \doteq 1.8$.

V příkladech vi-vii vyšetřete průběh funkce:

vi) $f(x) = 4x^5 - 5x^4 - 40x^3$. D_f je celé \mathbb{R} . Spočítejte limity v krajních bodech D_f .

Určete intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x)$. Určete intervaly, na kterých je funkce $f(x)$ konkávní, na kterých intervalech je $f(x)$ konvexní. Stanovte její inflexní body, určete obor hodnot funkce $f(x)$ a načrtněte její graf.

vii) $f(x) = -2x^3 - 2x^2 + 36x - 1$. D_f je celé \mathbb{R} . Spočítejte limity v krajních bodech D_f .

Určete intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x)$. Určete intervaly, na kterých je funkce $f(x)$ konkávní a na kterých intervalech je $f(x)$ konvexní. Stanovte inflexní body $f(x)$.

Určete obor hodnot funkce $f(x)$ a načrtněte její graf.

Výsledky

I.	a_n	min	inf	max	sup	lim	shora omez.	zdola omez.	monotonie
i	$\left\{ \frac{n^3 + 6n - 4}{2n^2 - 3n + 2} \right\}$	$a_1 = 3$	3	nemá	$+\infty$	$+\infty$	ne	ano	ani rostoucí ani klesající
ii	$\left\{ \frac{4n}{-3n^2 + 5n + 1} \right\}$	$a_2 = -8$	-8	$a_1 = \frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	ano	ano	ani rostoucí ani klesající
iii	$\left\{ \frac{2n^2 + 4}{5n^2 - n} \right\}$	Nemá	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{5}$	ano	ano	klesající
iv	$\left\{ \left(\frac{n-2}{n+1} \right)^n \right\}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	nemá	e^{-3}	e^{-3}	ano	ano	rostoucí

II.1	$f(x)$	D_f	Asymptoty bez směrnice	Asymptoty se směrnicí
i	$\frac{3x^2+5x-2}{x+2}$	$(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$	nemá (konečná limita v $x = -2$)	v $-\infty$: $y = 3x - 1$ v $+\infty$: $y = 3x - 1$
ii	$\frac{-3x+5}{x-1}$	$(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$	$x = 1$	v $-\infty$: $y = -3$ v $+\infty$: $y = -3$
iii	$\operatorname{arctg} x - 2x$	$(-\infty, +\infty)$	nemá	v $-\infty$: $y = -2x - \frac{\pi}{2}$ v $+\infty$: $y = -2x + \frac{\pi}{2}$
iv	$\frac{4x^2-x+2}{2x+1}$	$(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, \infty)$	$x = -\frac{1}{2}$	v $-\infty$: $y = 2x - \frac{3}{2}$ v $+\infty$: $y = 2x - \frac{3}{2}$

II.2	$f_p(x)$	p	Zápis funkce	$f_p(x)$
i	$f_p(x) = \begin{cases} 2px^2 - p^2x & x < 1 \\ \sqrt{x+3} - p & x > 1 \end{cases}$	1	$f_1(x) = \begin{cases} 2x^2 - x & x < 1 \\ \sqrt{x+3} - 1 & x > 1 \end{cases}$	$f_1(1) = 1$
		2	$f_2(x) = \begin{cases} 4x^2 - 4x & x < 1 \\ \sqrt{x+3} - 2 & x > 1 \end{cases}$	$f_2(1) = 0$
ii	$f_p(x) = \begin{cases} px + \frac{2p}{x} & x \in (0, 2) \\ p + x^2 & x \in (2, +\infty) \end{cases}$	2	$f_2(x) = \begin{cases} 2x + \frac{4}{x} & x \in (0, 2) \\ 2 + x^2 & x \in (2, +\infty) \end{cases}$	$f_1(2) = 6$

II.3

i) $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{2}x^4 - x^2 + 1}}{4}$ $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x^4 - x^2 + 1} \cdot (2x^3 - 2x)$, $D_{f'} = D_f$

$f'(0) = 0$, v pravém okolí je $f'(0_+) < 0$, tedy v pravém okolí bodu $x = 0$ a je f klesající.

Pozn. V levém okolí bodu $x = 0$ je $f'(0_-) > 0$, tedy je funkce f rostoucí.

V bodě $x = 0$ má funkce lokální maximum.

ii) $f(x) = \frac{2x}{12 - 3x^2}$. $D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$, $f'(x) = \frac{2}{3} \frac{4 + x^2}{(4 - x^2)^2}$, $D_{f'} = D_f$.

Funkce je rostoucí na $(-\infty, -2)$, na $(-2, 2)$ a na $(2, \infty)$ neboť $\frac{2}{3} \frac{4 + x^2}{(4 - x^2)^2} > 0$ na každém z uvedených intervalů.

Pozn. Funkce f není rostoucí na celém definičním oboru! Proč?

iii) $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 3)$, $D_f = (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$, $f'(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 3}$, $D_{f'} = D_f$,

V bodě $x = 4$ je $f'(4) = \frac{6}{5}$ tedy v levém i pravém okolí tohoto bodu je derivace kladná a funkce rostoucí.

Tečna v bodě $A = [4, \ln(5)]$ s rovnicí $y - \ln(5) = \frac{6}{5}(x - 4)$

iv) $f(x) = (\sin(3x) - \cos(2x))^2$, $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = 2(\sin(3x) - \cos(2x))(3\cos(3x) + 2\sin(2x))$, $D_{f'} = D_f$,
v bodě $x = 0$ je $f'(0) = 2(0 - 1)(3 + 0) = -6$, tedy v okolí tohoto bodu je funkce f klesající.

$$\text{v) } f(x) = \ln(x+6) \cdot \sqrt{-x^2 - 3x + 10}, D_f = [-5, 2],$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+6} \cdot \sqrt{-x^2 - 3x + 10} + \ln(x+6) \frac{-2x-3}{2\sqrt{-x^2 - 3x + 10}}, D_{f'} = (-5, 2),$$

$$f'(0) = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{10} + \ln(6) \frac{-3}{2\sqrt{10}} < 0, \text{ funkce je v pravém okolí (a též v levém okolí) klesající.}$$

Nápověda: $\ln(6) \doteq 1.8$

$$\text{vi) } f(x) = 4x^5 - 5x^4 - 40x^3,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^5 - 5x^4 - 40x^3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 \left(4 - \frac{5}{x} - \frac{40}{x^2}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^5 - 5x^4 - 40x^3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \left(4 - \frac{5}{x} - \frac{40}{x^2}\right) = -\infty$$

$$f'(x) = 20x^4 - 20x^3 - 120x^2 = 20x^2(x^2 - x - 6) \Rightarrow x_{1,2} = 0, x_3 = -2, x_4 = 3.$$

$f(x)$ je rostoucí na $(-\infty, -2)$ a na $(3, +\infty)$; $f(x)$ je klesající na $(-2, 3)$.

Lokální maximum v bodě $x = -2$, $f(-2) = 112$, lokální minimum v bodě $x = 3$, $f(3) = -513$

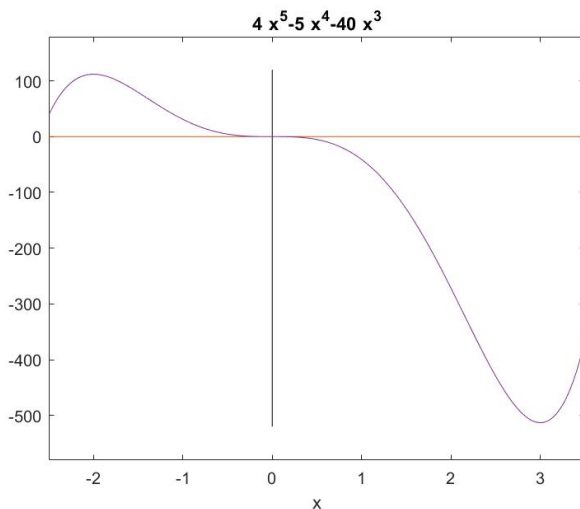
$$f''(x) = 80x^3 - 60x^2 - 240x = 20x(4x^2 - 3x - 12) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{201}}{8}, x_3 = \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{201}}{8}.$$

$f(x)$ je konkávní na $(-\infty, \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{201}}{8})$ a na $(0, \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{201}}{8})$;

$f(x)$ je konvexní na $(\frac{3}{8} - \frac{\sqrt{201}}{8}, 0)$ a na $(\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{201}}{8}, +\infty)$.

Inflexní body: $x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{201}}{8}, x_3 = \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{201}}{8}$.

Oborem hodnot je celé \mathbb{R} .



$$\text{vii) } f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 36x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 - 3x^2 + 36x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-2 - \frac{3}{x} + \frac{36}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 - 3x^2 + 36x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-2 - \frac{3}{x} + \frac{36}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = +\infty$$

$$f'(x) = -6x^2 - 6x + 36 = 6(-x^2 - x + 6) \Rightarrow x_1 = -3, x_4 = 2.$$

$f(x)$ je klesající na $(-\infty, -3)$ a na $(2, +\infty)$; $f(x)$ je rostoucí na $(-3, 2)$.

Lokální minimum v bodě $x = -3$, $f(-3) = -82$, lokální maximum v bodě $x = 2$, $f(2) = 43$

$$f''(x) = -12x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}.$$

$f(x)$ je konvexní na $(-\infty, -\frac{1}{2})$, $f(x)$ je konkávní na $(-\frac{1}{2}, +\infty)$.

Inflexní bod: $x_1 = -\frac{1}{2}$. Obor hodnot celé \mathbb{R} .

